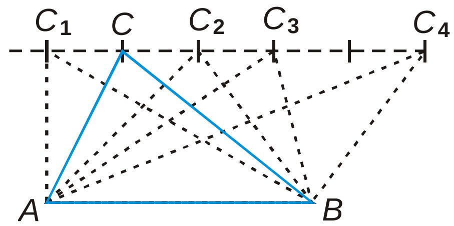
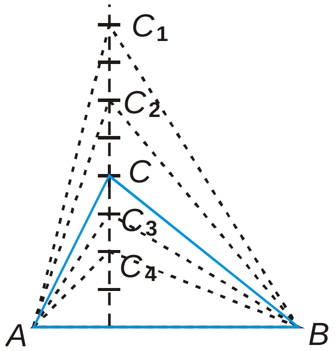
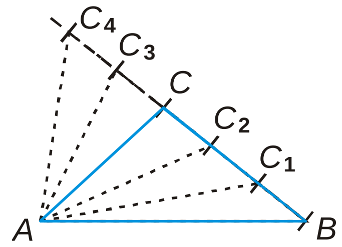
2.7.9 Obsah lichoběžníku

Předpoklady: 020708

Př. 1: Trojúhelník *ABC* má obsah 24 jednotek. Urči obsahy trojúhelníků ABC_n.

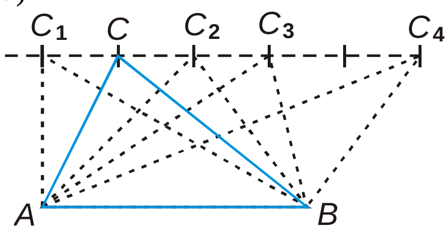






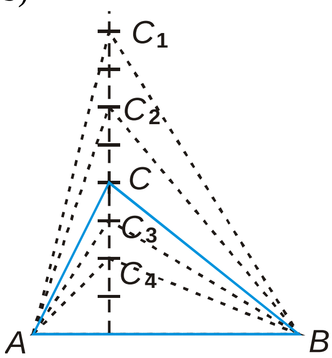
Vzorec pro obsah trojúhelníku: $S = \frac{c \cdot v_c}{2}$ $\Rightarrow$ obsah trojúhelníku se změní, pokud se změní buď strana nebo k ní přilehlá výška.

a)



Ani strana *AB* ani její výška v_c nemění (všechny narýsované vrcholy leží na přímce rovnoběžné se stranou *AB*) $\Rightarrow$ všechny trojúhelníky ABC_n mají obsah 24 jednotek.

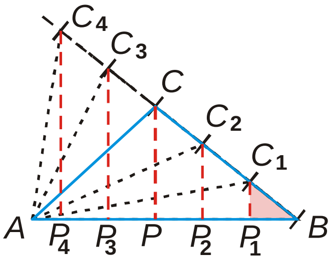
b)



Mění se výška v_a, délka strany AB $\Rightarrow$ ve stejném poměru, v jakém se změní výška, se změní i obsah trojúhelníku.

- Trojúhelník ABC_1: $v_{c1} = 2v_c$ (8 dílků místo 4):
  $S_1 = \frac{c_1 \cdot v_{c1}}{2} = \frac{c \cdot 2v_c}{2} = 2 \cdot \frac{c \cdot v_c}{2} = 2\,S = 2 \cdot 24 = 48$ jednotek,
- trojúhelník ABC_2: $v_{c2} = \frac{3}{2} v_c$ (6 dílků místo 4): $S_2 = \frac{3}{2} S = \frac{3}{2} \cdot 24 = 36$ jednotek,
- trojúhelník ABC_3: $v_{c3} = \frac{3}{4} v_c$ (3 dílky místo 4): $S_3 = \frac{3}{4} S = \frac{3}{4} \cdot 24 = 18$ jednotek,
- trojúhelník ABC_4: $v_{c4} = \frac{1}{2} v_c$ (2 dílky místo 4): $S_4 = \frac{1}{2} S = \frac{1}{2} \cdot 24 = 12$ jednotek.

c) Zdá se, že z obrázku nedokážeme určit, jak se mění výška v_c s posouváním vrcholu trojúhelníku po přímce *BC*. Dokreslíme do obrázku výšky v_{cx}.



Nakreslené výšky vytvoří sadu pravoúhlých trojúhelníků BC_nP_n. Trojúhelník BC_1P_1 je třikrát menší než trojúhelník BCP (strana BP_1 je třikrát menší než strana BC) $\Rightarrow$ poměry výšek trojúhelníků odpovídají poměrům stran BC_n.

- Trojúhelník ABC_1: $v_{c1} = \frac{1}{3} v_c$ (1 dílek místo 3): $S_1 = \frac{1}{3} \cdot S = \frac{1}{3} \cdot 24 = 8$ jednotek,
- trojúhelník ABC_2: $v_{c2} = \frac{2}{3} v_c$ (2 dílky místo 3): $S_2 = \frac{2}{3} S = \frac{2}{3} \cdot 24 = 16$ jednotek,
- trojúhelník ABC_3: $v_{c3} = \frac{4}{3} v_c$ (4 dílky místo 3): $S_3 = \frac{4}{3} S = \frac{4}{3} \cdot 24 = 32$ jednotek,
- trojúhelník ABC_4: $v_{c4} = \frac{5}{3} v_c$ (5 dílků místo 3): $S_4 = \frac{5}{3} S = \frac{5}{3} \cdot 24 = 40$ jednotek.

Pedagogická poznámka: Většina žáků kouká na příklad dost zmateně (jak to máme spočítat, když neznáme žádné rozměry), někteří však vidí řešení hned. S ostatními si připomínáme, podle jakého vzorce se obsah počítá. Když zbývající upozorním, aby se podívali, co se v obrázku děje s délkou strany a délkou výšky, chytí se v podstatě všichni.

Pedagogická poznámka: Při kontrole se ptám, která z probrané látky (přímá úměrnost - čím delší výška, tím větší obsah) byla podstatou příkladu.

Př. 2: V trojúhelníku *ABC* platí: $a = 20\,\text{cm}$, $b = 13\,\text{cm}$, $v_a = 12{,}6\,\text{cm}$, $v_c = 12\,\text{cm}$. Dopočti velikosti strany *c* a výšky v_b.

Můžeme spočítat obsah trojúhelníku: $S = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{20 \cdot 12{,}6}{2}\,\text{cm}^2 = 126\,\text{cm}^2$.

Z obsahu pak můžeme vypočítat stranu i výšku.

$$S = \frac{b \cdot v_b}{2} \quad / \cdot 2$$

$$2S = bv_b \quad / : b$$

$$v_b = \frac{2S}{b} = \frac{2 \cdot 126}{13} \doteq 19{,}4\,\text{cm}$$

$$S = \frac{c \cdot v_c}{2} \quad / \cdot 2$$

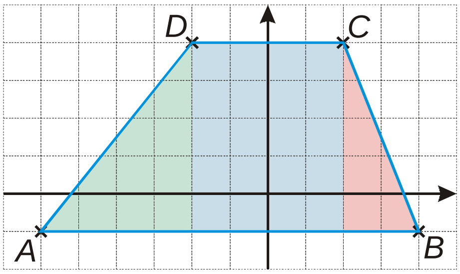
$$2S = c \cdot v_c \quad / : v_c$$

$$c = \frac{2S}{v_c} = \frac{2 \cdot 126}{12} = 21\,\text{cm}$$

Strana *c* má velikost 21 cm, výška v_b přibližně 19,4 cm.

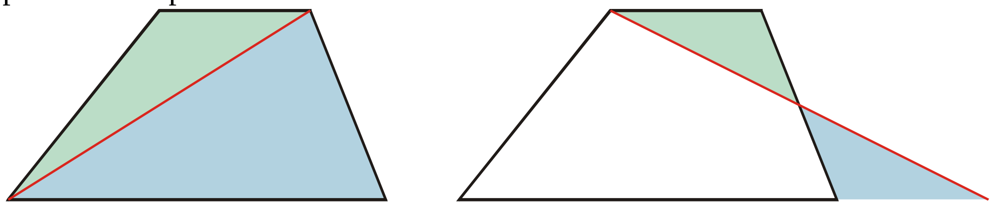
Př. 3: Nakresli na čtverečkovaný papír lichoběžník *ABCD*: $A[-6;-1]$, $B[4;-1]$, $C[2;4]$, $D[-2;4]$. Urči obsah lichoběžníku. Najdi vzorec pro jeho výpočet z rozměrů lichoběžník z jeho rozměrů (analogie vzorce z předchozí hodiny).

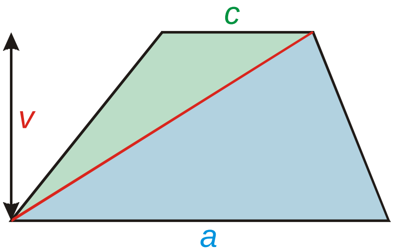
Lichoběžník si můžeme rozdělit na tři části.



Obsah lichoběžníku: $S = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 + 4 \cdot 5 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 5 = 10 + 20 + 5 = 35$ čtverečků.

Př. 4: Vzorec pro obsah lichoběžníku je možné s využitím vzorce pro obsah trojúhelníku odvodit pomocí jednoho z následujících obrázků. Vzorec odvoď a ověř pomocí předchozího příkladu.





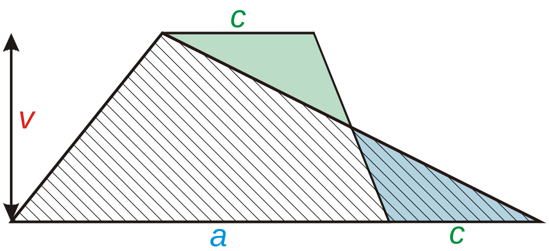
Rozdělili jsme lichoběžník na dva trojúhelníky.

- Zelený o straně c a výšce v $\Rightarrow$ s obsahem $S_z = \frac{c \cdot v}{2}$.
- Modrý o straně a a výšce v $\Rightarrow$ s obsahem $S_m = \frac{a \cdot v}{2}$.

Obsah celého lichoběžníku: $S = S_m + S_z = \frac{a \cdot v}{2} + \frac{c \cdot v}{2} = \frac{(a+c)v}{2}$.

Ověření: lichoběžník z příkladu 3: $a = 10$, $c = 4$, $v = 5$

$S = \frac{(a+c)v}{2} = \frac{(10+4)\cdot 5}{2} = 35$ $\Rightarrow$ stejný výsledek jako spočtením čtverečků.



Přenesením části lichoběžníku získáme trojúhelník o výšce v a základně $a+c$ s obsahem $S = \frac{(a+c)v}{2}$.

Ověření je stejné jako u předchozího obrázku.

Pedagogická poznámka: V hodině příklad 4 nepromítáme, ale jen si nakreslíme oba obrázky bez komentáře na tabuli a necháme všem chvilku na rozmyšlení. Pak napíši na tabuli vztah a opět nechám čas, aby si ho i v případě, že vzorec sami neodvodí, v obrázcích našli.

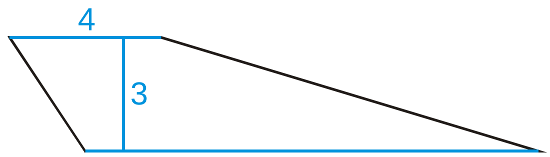
Dodatek: Vzorec pro obsah lichoběžníku můžeme odvodit i z původního trojbarevného obrázku v řešení příkladu. Lichoběžník je rozdělen na tři části: obdélník o obsahu $S_1 = c \cdot v$ a dva trojúhelníky, které můžeme složit do jednoho trojúhelníku se stranou $(a-c)$ a výškou v a tedy obsahem $S_2=\frac{1}{2}(a-c)v$. Sečteme oba obsahy dohromady $S=c\cdot v+\frac{1}{2}(a-c)v=c\cdot v+\frac{1}{2}av-\frac{1}{2}ac=\frac{1}{2}av+\frac{1}{2}ac=\frac{1}{2}(a+c)v$.

Př. 5: Vypočti obsah lichoběžníku o základnách $a=4\,\mathrm{cm}$, $c=7\,\mathrm{cm}$ a výšce $v=10\,\mathrm{cm}$.

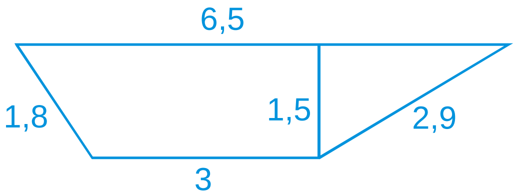
Dosazení do vzorce: $S=\frac{(a+c)v}{2}=\frac{(4+7)\cdot 10}{2}\,\mathrm{cm}^2=55\,\mathrm{cm}^2$

Lichoběžník má obsah $55\,\mathrm{cm}^2$.

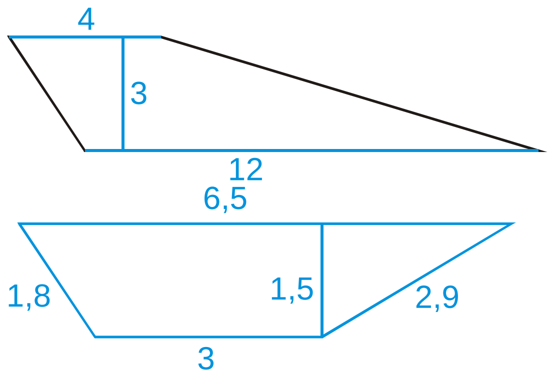
Př. 6: Vypočti obsahy lichoběžníků na obrázku.



a)



b)



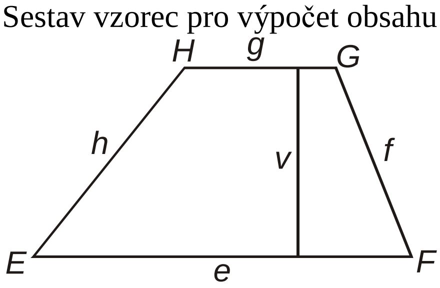
$a=12\,\mathrm{cm}$, $c=4\,\mathrm{cm}$, $v=3\,\mathrm{cm}$

$S=\frac{(a+c)v}{2}=\frac{(12+4)\cdot 3}{2}\,\mathrm{cm}^2=24\,\mathrm{cm}^2$

$a=3\,\mathrm{cm}$, $c=6{,}5\,\mathrm{cm}$, $v=1{,}5\,\mathrm{cm}$

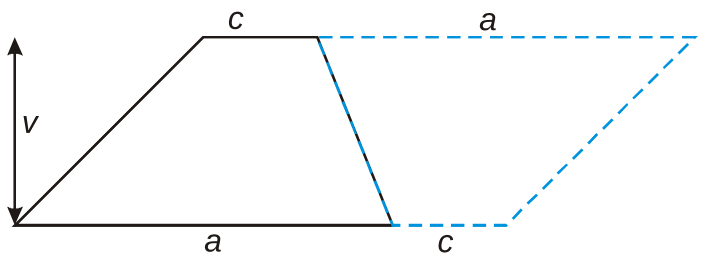
$S=\frac{(a+c)v}{2}=\frac{(3+6{,}5)\cdot 1{,}5}{2}\,\mathrm{cm}^2=7{,}125\,\mathrm{cm}^2$

Př. 7: Sestav vzorec pro výpočet obsahu lichoběžníku s označením stran na obrázku.



Ve vzorci jen nahradíme stranu *a* stranou *e* a stranu *c* stranou *g*: $S=\frac{(e+g)v}{2}$.

Př. 8: Odvoď vzorec pro obsah lichoběžníku ze vzorce pro obsah rovnoběžníku.



Zkopírováním lichoběžníku získáme rovnoběžník o straně $(a+c)$ a výšce v s obsahem $S=(a+c)v$.

Obsah lichoběžníku je poloviční, tedy $S=\frac{(a+c)v}{2}$.

Shrnutí: Obsah lichoběžníku je dán vzorcem $S=\frac{(a+c)v}{2}$.